# ΠΑΡΕΜΒΟΛΗ ΜΕ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ SPLINE :

**$4^{\underline{o}}$ ΘΕΜΑ**



## ΙΔΕΑ

Στην παρεμβολή γνωρίζουμε από την Αριθμητική ανάλυση ότι όσο περ/ρα σημεία παίρνουμε τόσο μεγαλύτερος ο βαθμός του πολυωνύμου. Τα πολλά σημεία δηλώνουν καλή ακρίβεια, αλλά τότε το πρόβλημα γίνεται επιπλοκότερο διότι θα έχουμε να κάνουμε πολλούς υπολογισμούς σε πολυώνυμα μεγάλου βαθμού. (και ουσιαστικά καταλήγουμε να μην έχουμε εξασφαλισμένη την ακρίβεια αυτή), Έχει αποδειχθεί ότι όταν ο βαθμός του πολυωνύμου παρεμβολής τείνει προς το άπειρο, το σφάλμα της πολυωνυμικής παρεμβολής τείνει προς το άπειρο. Γεωμετρική ερμηνεία αυτού είναι ότι τα πολυώνυμα μεγάλου βαθμού έχουν την τάση να ταλαντώνονται. Δηλ. όσο πιο κοντά είναι το ένα με το άλλο σημείο (παρεμβολή) τόσο μεγαλύτερα τα σφάλματα)

Η παράκαμψη του παραπάνω προβλήματος γίνεται με την επινόηση της ΠΑΡΕΜΒΟΛΗΣ ΤΜΗΜΑΤΙΚΑ ΣΥΝΕΧΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ. Διαμερίζουμε, δηλαδή το διάστημα της συνάρτησης προς προσέγγιση και εφαρμόζουμε παρεμβολή με πολυώνυμα προκαθορισμένου βαθμού αρκεί να εξασφαλίζεται η συνέχεια και η ομαλότητα.

# Παρεμβολή με Τμηματικά γραμμικές συναρτήσεις

Μειονέκτημα αυτής είναι ότι δεν εξασφαλίζεται η ομαλότητα (δηλ. η συνέχεια των παραγώγων)

Θεωρούμε διαμέριση $x_0=a<x_1<x_2<\dots<x_n=b$ στο διάστημα $[a,b]$ και παίρνουμε το γνωστό από την αριθμητική ανάλυση πολ. παρεμβολής $1^{ου}$ βαθμού κατά τον Lagrange ( $P(x)=\sum_{i=0}^{n} f(x_i)L_i(x)$ , $L_i(x)=\prod_{j=0}^{n}\frac{x-x_j}{x_i-x_j}$ ).

$$P(x)=\frac{x-x_{i+1}}{\underbrace{x_i-x_{i+1}}_{=-h_i}}f_i+\frac{x-x_i}{\underbrace{x_{i+1}-x_i}_{h_i}}f_{i+1}=\frac{f_{i+1}-f_i}{\underset{\text{το βήμα}}{h_i}}x+\frac{x_{i+1}f_i-x_if_{i+1}}{h_i}$$

για κάθε $i=0,1,2,\dots,n-1$.

Πχ

Ποια η τμηματικά γραμμική συνάρτηση που προσεγγίζει την $f(x)=x+\frac{1}{x}$, στο $X_4=\{1,2,3,4\}$;

ΛΥΣΗ

| $x_i$ | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| $f_i$ | 2 | 5/2 | 10/3 | 17/4 |

Διαμερίζουμε το $X_4$ στα: $[1,2]$, $[2,3]$, $[3,4]$.

- $x\in[1,2]$: $P(x)=\frac{f(2)-f(1)}{2-1}x+\frac{2\cdot f(1)-1f(2)}{2-1}=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$
- $x\in[2,3]$: $P(x)=\frac{f(3)-f(2)}{3-2}x+\frac{3f(2)-2f(3)}{3-2}=\frac{5}{6}x+\frac{5}{6}$
- $x\in[3,4]$: $P(x)=\frac{f(4)-f(3)}{4-3}x+\frac{4f(3)-3f(4)}{4-3}=\frac{11}{2}x+\frac{7}{12}$

# Παρεμβολή με κυβικές Συναρτήσεις Hermite

Η παρεμβολή Hermite εξομαλίζει ομαλότητα αλλά μέχρι τις 1ες παραγώγους.
Θεωρούμε λοιπόν διαμέριση $\alpha = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ στο διάστημα $[a,b]$. Επίσης, $f \in C^1[a,b]$ και $f_i, f_i'$ οι τιμές της $f, f'$ στα $x_i$, $\forall i$ αντίστοιχα.
Η παρεμβολή με κυβικές συναρτήσεις Hermite αναζητά στην εύρεση πολυωνυμικής συνάρτησης $h$ που αποτελείται από κυβικά πολυώνυμα $h_i(x)$ στο $[x_i, x_{i+1}]$, $i=0,1,\dots,n-1$ τ/ω: $h(x_i) = f_i$ & $h'(x_i) = f_i'$
(Δεχόμαστε ότι το πολ. παρεμβολής Hermite είναι μοναδικό και βαθμού το πολύ 3ιη)

ΕΥΡΕΣΗ ΤΟΥ ΚΥΒΙΚΟΥ ΠΟΛΥΩΝΥΜΟΥ HERMITE:

Τα μόνα γνωστά είναι: $f(\alpha), f(b), f'(\alpha), f'(b)$
Δηλαδή, εκτός των τιμών της $f$ στα $\alpha, b$ γνωρίζουμε και τις τιμές της $f'$ στα $\alpha, b$.
Δηλαδή τις κλίσεις στα σημεία $\alpha, b \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow$ γνωρίζουμε την $f$ σε γειτονικό σημείο του $\alpha$ και $b$ $\Rightarrow$ γνωρίζουμε την $f$ στα $\alpha+\varepsilon$ και $b-n$, $\forall \varepsilon, n > 0$ ($\varepsilon, n \to 0$: πολύ μικρά)
Στα σημεία $a, a+\varepsilon, b, b-n$ προσδιορίζουμε την πολυωνυμική παρεμβολή κατά Lagrange
Άρα, σε διάταξη: $\alpha, \alpha+\varepsilon, b, b-n$ είναι:

$x_0 = a,\ x_1 = a+\varepsilon,$
$x_2 = b-\eta,\ x_3 = b$

$$p_3(x) = \sum_{i=0}^{3} f(x_i)\cdot l_i(x) =$$

$$= f(x_0)\,l_0(x) + f(x_1)\,l_1(x) + f(x_2)\,l_2(x) + f(x_3)\,l_3(x) \quad (1)$$

- $$l_0(x) = \prod_{\substack{j=0\\ \neq i}}^{3} \frac{x-x_j}{x_0-x_j} = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} =$$

$$= \frac{(x-a+\varepsilon)(x-b+\eta)(x-b)}{(\cancel{a}-\cancel{a}-\varepsilon)(a-b+\eta)(a-b)} = \frac{(x-a+\varepsilon)(x-b+\eta)(x-b)}{-\varepsilon(a-b+\eta)(a-b)}$$

- $$l_1(x) = \prod_{\substack{j=0\\ \neq i}}^{3} \frac{x-x_j}{x_1-x_j} = \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} =$$

$$= \frac{(x-a)(x-b+\eta)\cdot(x-b)}{(\cancel{a}+\varepsilon-\cancel{a})(a+\varepsilon-b+\eta)(a+\varepsilon-b)} = \frac{(x-a)(x-b+\eta)(x-b)}{\varepsilon(a+\varepsilon-b+\eta)(a+\varepsilon-b)}$$

με όμοιο τρόπο

- $$l_2(x) = \frac{(x-a)(x-a-\varepsilon)(x-b)}{(b-\eta-a)(b-\eta-a-\varepsilon)(-\eta)}, \quad l_3(x) = \frac{(x-a)(x-a-\varepsilon)(x-b+\eta)}{(b-a)(b-a-\varepsilon)\cdot\eta}$$

Αντικαθιστώντας στη σχέση (1), παίρνουμε:

$$p_3(x) = \frac{(x-a+\varepsilon)(x-b+\eta)(x-b)}{-\varepsilon(a-b+\eta)(a-b)} f(a) + \frac{(x-a)(x-b+\eta)(x-b)}{\varepsilon(a+\varepsilon-b+\eta)(a+\varepsilon-b)} f(a+\varepsilon) +$$

$$+ \frac{(x-a)(x-a-\varepsilon)(x-b)}{-\varepsilon(a-b+\eta)(a-b)} f(b-\eta) + \frac{(x-a)(x-a+\varepsilon)(x-b+\eta)}{(b-a)(b-a-\varepsilon)\cdot\eta} f(b).$$

όπου ονομάζω τους δύο πρώτους όρους $S_1$ και τους δύο επόμενους όρους $S_2$.

Θα υπολογίσουμε το όριο όταν $\eta \to 0$ στο $S_1$.

και αντίστοιχα θα γίνει το όριο $\varepsilon \to 0$ στο $S_2$.

$$S_1 = (x-a)(x-b+n)(x-b)\underbrace{\left[\frac{\dfrac{f(a+\varepsilon)}{(a+\varepsilon-b+n)(a+\varepsilon-b)} - \dfrac{f(a)}{(a-b+n)(a-b)}}{\varepsilon}\right]} + \frac{(x-b+n)(x-b)}{(a-b+n)(a-b)} f(a)$$

Τότε διατηρώντας $n=$σταθ και παίρνοντας όριο όταν $\varepsilon \to 0$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\dfrac{f(a+\varepsilon)}{(a+\varepsilon-b+n)(a+\varepsilon-b)} - \dfrac{f(a)}{(a-b+n)(a-b)}}{\varepsilon} = \left(\frac{f(a)}{(a-b+n)(a-b)}\right)'$$

άρα,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} S_1 = (x-a)(x-b+n)(x-b)\left(\frac{f(a)}{(a-b+n)(a-b)}\right)' + \frac{(x-b+n)(x-b)}{(a-b+n)(a-b)} f(a) =$$

$$= \frac{(x-a)(x-b+n)(x-b)}{(a-b+n)(a-b)}\left(f'(a) - \frac{f(a)}{a-b+n} - \frac{f(a)}{a-b}\right) + \frac{(x-b+n)(x-b)}{(a-b+n)(a-b)} f(a). \quad (2)$$

Έπειτα παίρνουμε το όριο για $n \to 0$ στο $S_1$ στην κατάσταση που ήδη βρίσκεται (δηλ. στην κατάσταση (2))

$$\lim_{\varepsilon, n \to 0} S_1 = \left(\frac{(x-b)^2}{(b-a)^2} + 2\frac{(x-a)(x-b)^2}{(b-a)^3}\right) f(a) + \frac{(x-a)(x-b)^2}{(b-a)^2} f'(a).$$

Όμοια προκύπτει και το $\lim\limits_{\varepsilon, n \to 0} S_2$.

Τελικά,

$$\lim_{\varepsilon, n \to 0} S_2 = \left(\frac{(x-a)^2}{(b-a)^2} + 2\frac{(x-b)(x-a)^2}{(b-a)^3}\right) f(b) + \frac{(x-b)(x-a)}{(b-a)^2} f'(b)$$

Συναληθευτικώς,

$$\boxed{h(x) = \lim_{\varepsilon, n \to 0} S_1 + \lim_{\varepsilon, n \to 0} S_2}$$

Επιστρέφοντας τώρα στη διαμέριση $X_m = \{a, x_1, \ldots, b\}$ υπολογίζεται εύκολα η συνάρτηση hermite από την παραπάνω έκφραση, αντικαθιστώντας με $x_i$ και $x_{i+1}$ τα $a$ και $b$ αντίστοιχα $\forall i = 0, 1, \ldots, n-1$

Έτσι, λαμβάνουμε:

$$h(x) = \left[\frac{(x-x_{i+1})^2}{(\Delta x_i)^2} + 2\frac{(x-x_i)(x-x_{i+1})^2}{(\Delta x_i)^3}\right] f_i + \left[\frac{(x-x_i)(x-x_{i+1})^2}{\Delta(x_i)^2}\right] f_i' +$$

$$+ \left[\frac{(x-x_i)^2}{(\Delta x_i)^2} - 2\frac{(x-x_{i+1})(x-x_i)^2}{(\Delta x_i)^2}\right] f_{i+1} + \left[\frac{(x-x_{i+1})(x-x_i)^2}{(\Delta x_i)^2}\right] f_{i+1}'$$

όπου $x \in [x_i, x_{i+1}]$ και $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$, $\forall i = 0,1,\ldots,n-1$

Σχόλιο

Αποδεικνύεται ότι ο χώρος $(H_n)$ όλων των τμηματικών συναρτήσεων Hermite ορισμένες στο $[a,b]$ με διαμέριση $X_n = \{a, x_1, x_2, \ldots, x_n = b\}$ έχει διάσταση $2n+2$ (αυτό αφού είναι $n+1$ τιμές για την $f$ και άλλες $n+1$ τιμές για την $f'$. Άρα, $f_i = f(x_i)$, $f_i' = f'(x_i)$ σε όλα τα σημεία της διαμέρισης, άρα είναι $(n+1)+(n+1) = 2(n+1)$).

## Άσκηση 1

Να βρεθεί η τμηματικά κυβική συνάρτηση Hermite που παρεμβάλλεται στη συνάρτηση $f(x) = x^4$, στο $X_3 = \{-1, 0, 1\}$.

ΛΥΣΗ

| $x_i$ | $-1$ | $0$ | $1$ |
|---|---|---|---|
| $f_i$ | $1$ | $0$ | $1$ |
| $f'$ | $-4$ | $0$ | $4$ |

ορίζουμε διαμέριση στο $X_3$, τα: $[-1,0]$ και $[0,1]$

- $x \in [-1,0]$: $h(x) = \left[\frac{(x-0)^2}{1} + 2\frac{(x+1)(x-0)^2}{1^3}\right] f(-1) + \left[\frac{(x+1)(x-0)^2}{1}\right] f'(-1)$

$$+ \left[\frac{(x+1)^2}{1} - 2\frac{(x-0)(x+1)^2}{1}\right] f(0) + \frac{(x-0)(x+1)^2}{1} f'(0) = \ldots = -2x^3 - x^2$$

• $x\in[0,1]$:

$$h(x)=\left[\frac{(x-1)^2}{1}+2\,\frac{(x-0)(x-1)^2}{1}\right]f(0)+\left[\frac{(x-0)(x-1)^2}{1}\right]f'(0)+$$

$$+\left[\frac{(x-0)^2}{1}-2\,\frac{(x-1)(x-0)^2}{1}\right]f(1)+\frac{(x-1)(x-0)^2}{1}f'(1)=\dots=2x^3-x^2$$

Άρα, $h(x)=\begin{cases}-2x^3-x^2, & x\in[-1,0]\\ 2x^3-x^2, & x\in[0,1].\end{cases}$

Παρατήρηση:

$x\in[-1,0]\Rightarrow -x\in[0,1]$

$h(-x)=2(-x)^3-(-x)^2=-2x^3-x^2=h(x)\Rightarrow h$ στο $[-1,0]$ άρτια

$x\in[0,1]\Rightarrow -x\in[-1,0]$

$h(-x)=-2(-x)^3-(-x)^2=2x^3-x^2=h(x)\Rightarrow h$ στο $[0,1]$ άρτια

Αθροιστικά, η $h$ άρτια $\forall x\in[-1,1]$

## Παρεμβολή με κυβικές συναρτήσεις Spline

Έστω η διαμέριση $x_0=a<x_1<x_2<\dots<x_n=b$ του διαστήματος $[a,b]$ και $f$ ορισμένη στο $[a,b]$ και συνεχής σε αυτό. Έστω τώρα $S(X_n)\in C^2[a,b]$ είναι το σύνολο των τμηματικά κυβικών συναρτήσεων στα διαστήματα $[x_i,x_{i+1}]$, $i=0,1,2,\dots,n-1$. Τις συναρτήσεις $S(f,x_n;x_i)=S(x_i)$ τις καλούμε κυβικές Spline και έχουν την ιδιότητα: το $S(x)$ είναι πολυώνυμο το πολύ τρίτου βαθμού σε κάθε υποδιάστημα $[x_i,x_{i+1}]$

ΘΕΩΡΗΜΑ:

Δοθέντων αριθμών $S_0' = f'(x_0)$ και $S_n' = f'(x_n)$ τότε υπάρχει μοναδική κυβική συνάρτηση κυβική Spline τ/ω: $S(f, X_n; x_i) = f_i$ και $S'(f, X_n; a) = S_0'$, $S'(f, X_n; b) = S_n'$

Απόδειξη

Η απόδειξη μας δίνει και τον τύπο της μοναδικής κυβικής Spline συνάρτησης.

Έστω $S_i' = S'(x_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$

Έπειτα υπολογίζουμε το πολυώνυμο Hermite $S(x)$ όπου η παράγωγος στα ενδιάμεσα σημεία της Hermite να είναι τα $S_i'$ λόγω ότι ζητούμε ομαλότητα.

Έτσι,

$$S(x) = \left[\frac{(x - x_{i+1})^2}{(\Delta x_i)^2} + 2\,\frac{(x - x_i)(x - x_{i+1})^2}{(\Delta x_i)^3}\right] f_i + \left[\frac{(x - x_i)(x - x_{i+1})^2}{(\Delta x_i)^2}\right] S_i' +$$

$$+ \left[\frac{(x - x_i)^2}{(\Delta x_i)^2} - 2\,\frac{(x - x_{i+1})(x - x_i)^2}{(\Delta x_i)^3}\right] f_{i+1} + \left[\frac{(x - x_{i+1})(x - x_i)^2}{(\Delta x_i)^2}\right] S_{i+1}'.$$

Αλλά, $S \in C^2[\alpha, \beta]$ άρα απαιτούμε συνέχεια της $S''$

Παραγωγίζοντας δύο φορές, παίρνουμε:

$$S''(x) = \left[\frac{2}{(\Delta x_i)^2} + 2\,\frac{6x - 2(x_i + 2x_{i+1})}{(\Delta x_i)^3}\right] f_i + \left[\frac{6x - 2(x_i + 2x_{i+1})}{(\Delta x_i)^2}\right] S_i' +$$

$$+ \left[\frac{2}{(\Delta x_i)^2} - 2\,\frac{6x - 2(2x_i + x_{i+1})}{(\Delta x_i)^3}\right] f_{i+1} + \left[\frac{6x - 2(2x_i + x_{i+1})}{(\Delta x_i)^2}\right] S_{i+1}'$$

Ενδιαφερόμαστε για την ομαλότητα στα άκρα $x_i, x_{i+1}$

$\forall i = 1, 2, \dots, n-1$. Άρα όπου $x = x_i$ και όπου $x = x_{i+1}$

- $x = x_i$,

$$S''(x_i) = \left[\frac{2}{(\Delta x_i)^2} + \frac{6x_i - 2(x_i + 2x_{i+1})}{(\Delta x_i)^3}\right] f_i + \left[\frac{6x_i - 2(x_i + 2x_{i+1})}{(\Delta x_i)^2}\right] S_i' +$$

$$+ \left[\frac{2}{(\Delta x_i)^2} - 2\,\frac{6x_i - 2(2x_i + x_{i+1})}{(\Delta x_i)^3}\right] f_{i+1} + \left[\frac{6x_i - 2(2x_i + x_{i+1})}{(\Delta x_i)^2}\right] S_{i+1}'$$

$$= -\frac{6}{(\Delta x_i)^2} f_i - \frac{4}{\Delta x_i} S_i' + \frac{6}{(\Delta x_i)^2} f_{i+1} - \frac{2}{\Delta x_i} S_{i+1}' =$$

$$= \frac{6}{(\Delta x_i)^2} \Delta f_i - \frac{4}{\Delta x_i} S_i' - \frac{2}{\Delta x_i} S_{i+1}'.$$

- $x = x_{i+1}$ (όμοια)

$$S''(x_{i+1}) = -\frac{6}{(\Delta x_i)^2} \Delta f_i + \frac{2}{\Delta x_i} S_i' + \frac{4}{\Delta x_i} S_{i+1}'.$$

Για να υπάρχει λοιπόν ομαλότητα στην $S''(x_i)$ θα πρέπει δεξιά και αριστερή πλευρική παράγωγος να είναι ίσες.

$$S''(x_i)\Big|_{[x_i, x_{i+1}]} = S''(x_i)\Big|_{[x_{i-1}, x_i]}. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{6}{(\Delta x_i)^2}\Delta f_i - \frac{4}{\Delta f_i} S_i' - \frac{2}{\Delta x_i} S_{i+1}' = -\frac{6}{(\Delta x_{i-1})^2}\Delta f_{i-1} + \frac{2}{\Delta x_{i-1}} S_{i-1}' + \frac{4}{\Delta x_{i-1}} S_i' \Leftrightarrow$$

$\frac{\Delta x_{i-1}\cdot\Delta x_i}{2}$ πολ/ζω

$$\Leftrightarrow \Delta x_i S_{i-1}' + 2(\Delta x_{i-1} + \Delta x_i) S_i' + \Delta x_{i-1} S_{i+1}' = 3\left[\frac{\Delta x_i}{\Delta x_{i-1}}\Delta f_{i-1} + \frac{\Delta x_{i-1}}{\Delta x_i}\Delta f_i\right]$$

για κάθε $i = 1, 2, \ldots, n-1$.

Αυτή η εξίσωση είναι ισοδύναμη με ένα σύστημα $(n-1)\times(n-1)$ με αγνώστους τα $S_i'$ (τριδιαγώνιο σύστημα)

$A\bar{u} = q$. όπου $A$ τριδιαγώνιος πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 2(\Delta x_0 + \Delta x_1) & \Delta x_0 & & & 0 \\ \Delta x_2 & 2(\Delta x_1 + \Delta x_2) & \Delta x_1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & & & \Delta x_{n-1} & 2(\Delta x_{n-2} + \Delta x_{n-1}) \end{bmatrix}$$

τα στοιχεία του $A$, θετικά γιατί είναι διατεταγμένα.

$\bar{u} = [S_1', S_2', \ldots, S_{n-1}']^T$ και

$$q = \begin{bmatrix} 3\left[\frac{\Delta x_1}{\Delta x_0}\Delta f_0 + \frac{\Delta x_0}{\Delta x_1}\Delta f_1\right] - \Delta x_1 f'(a) \\ 3\left[\frac{\Delta x_2}{\Delta x_1}\Delta f_1 + \frac{\Delta x_1}{\Delta x_2}\Delta f_2\right] \\ \vdots \\ 3\left[\frac{\Delta x_{n-1}}{\Delta x_{n-2}}\Delta f_{n-2} + \frac{\Delta x_{n-2}}{\Delta x_{n-1}}\Delta f_{n-1}\right] - \Delta x_{n-2} f'(b) \end{bmatrix}$$

Προσοχή!
$S_0' = f_0' = f'(a)$
και
$S_n' = f_n' = f'(b)$
σταθερές ποσότητες

Τέλος, αφού ο $A$ αυστηρά διαγώνια υπέρτερος (δηλ. κάθε διαγώνιο στοιχείο είναι μεγαλύτερο από το αθρ. των υπολοίπων στοιχείων κάθε γραμμής) $\Rightarrow$ $A$ αντιστρέψιμος $\Rightarrow$ το σύστημα έχει μοναδική λύση τον $u$.

Άσκηση 2 (ΘΕΜΑ 4ο ΙΟΥΝΙΟΣ 2014):

Να βρεθεί η κυβική συνάρτηση Spline στο $[0,2]$ που προσεγγίζει τη συνάρτηση $f$, η οποία δίνεται στο σύνολο σημείων $X_3=\{0,1,2\}$ και

| $x_i$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| $f_i$ | 0 | 1 | 0 |

και $f'(0)=0$, $f'(2)=-4$.

ΛΥΣΗ

Παρατηρούμε ότι δίνονται μονάχα 3 σημεία άρα βρισκόμαστε στην πιο απλή περίπτωση όπου το $S'$ είναι μίας διάστασης.

$\Delta x_0 = x_1 - x_0 = 1-0 = 1$, $\Delta x_1 = x_2 - x_1 = 2-1 = 1$

$\Delta f_0 = f_1 - f_0 = 1-0 = 1$, $\Delta f_1 = f_2 - f_1 = 0-1 = -1$

$$2(\Delta x_0+\Delta x_1)S_1' = 3\left(\frac{\Delta x_0}{\Delta x_1}\Delta f_1 + \frac{\Delta x_1}{\Delta x_0}\Delta f_0\right) - \Delta x_1 f'(0) - \Delta x_0 f'(2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\cdot 2\cdot S_1' = 3\left(-1+1\right) - 1\cdot 0 - 1\cdot(-4) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4S_1' = 4 \Rightarrow \boxed{S_1'=1}$$

Έπειτα, το πολυώνυμο Hermite δίνεται από:

$$S(x) = \left[\frac{(x-x_{i+1})^2}{(\Delta x_i)^2} + 2\frac{(x-x_i)(x-x_{i+1})^2}{(\Delta x_i)^3}\right]f_i + \left[\frac{(x-x_i)(x-x_{i+1})^2}{(\Delta x_i)^2}\right]S_i' +$$

$$+\left[\frac{(x-x_i)^2}{(\Delta x_i)^2} - 2\frac{(x-x_{i+1})(x-x_i)^2}{(\Delta x_i)^3}\right]f_{i+1} + \left[\frac{(x-x_{i+1})(x-x_i)^2}{(\Delta x_i)^2}\right]S_{i+1}'$$

Συνέχεια :

• Για $x \in [0,1]$ :

$$S(x) = \cancel{\left[(x-1)^2 + 2x(x-1)^2\right]\cdot 0} + \left[x(x-1)^2\right]\cdot 0 + \left[x^2 - 2(x-1)x^2\right]\cdot 1 + \left[(x-1)\cdot x^2\right] 1 = -x^3+2x^2 .$$

$$= \cancel{x - 2x^3 + 2x^2 + x^3 - x^2 = -x^3 + x^2 + x}$$

• Για $x \in [1,2]$ :

$$S(x) = \left[(x-2)^2 + 2(x-1)(x-2)^2\right]\cdot 1 + \left[(x-1)(x-2)^2\right]\cdot 1 + \cancel{\left[(x-1)^2 - 2(x-2)(x-1)^2\right]\cdot 0} + \left[(x-2)(x-1)^2\right](-4) =$$

$$= \cancel{\left[(x-2)^2(1+2x-2+x-1) - 4\left((x-2)(x^2-2x+1)\right)\right]} = \quad = -x^3-2x^2 .$$

$$= \left[\cancel{(x-2)(3x-2) - 4(x^3 - 2x^2 + x - 2x^2 + 4x - 2)}\right] =$$

$$= \cancel{3x^2 - 2x - 6x + 4 - 4x^3 + 8x^2 - 4x + 8x^2 - 16x + 8} =$$

$$= \cancel{-4x^3 + 19x^2 - 28x + 12} .$$

Άρα, [redacted] $-x^3+2x^2$ , $x \in [0,1]$

[redacted] $-x^3-2x^2$ , $x \in [1,2]$

## Άσκηση 3 (Αντίστοιχο με του Σεπτεμβρίου 2015)

Να βρεθεί η κυβική συνάρτηση Spline στο $[-2,2]$ που προσεγγίζει τη συνάρτηση $f$ ώστε

| $x_i$ | -2 | -1 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|---|
| $f_i$ | -2 | 0 | 0 | -2 |

και οι παράγωγοι στα άκρα είναι $f'(-2)=1$ και $f'(2)=-1$

ΛΥΣΗ

όμοια με πριν μόνο που τώρα θα λύσουμε ένα 2x2 σύστημα λόγω ότι έχουμε δύο ενδιάμεσα σημεία.

$\Delta x_0 = 1$, $\Delta x_1 = 2$, $\Delta x_2 = 1$

$\Delta f_0 = 2$, $\Delta f_1 = 0$, $\Delta f_2 = -2$

Η γενική σχέση είναι:

$$\Delta x_i S'_{i-1} + 2(\Delta x_{i-1} + \Delta x_i) S'_i + \Delta x_{i-1} \cdot S'_{i+1} = 3\left[\frac{\Delta x_i}{\Delta x_{i-1}} \Delta f_{i-1} + \frac{\Delta x_{i-1}}{\Delta x_i} \Delta f_i\right]$$

$\forall i = 1,2,3$. Αυτή είναι ισοδύναμη με το σύστημα:

$$\begin{bmatrix} 2(\Delta x_0 + \Delta x_1) & \Delta x_0 \\ \Delta x_2 & 2(\Delta x_1 + \Delta x_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S'_1 \\ S'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\left(\frac{\Delta x_1}{\Delta x_0} \Delta f_0 + \frac{\Delta x_0}{\Delta x_1} \Delta f_1\right) - \Delta x_1 f'(-2) \\ 3\left(\frac{\Delta x_2}{\Delta x_1} \Delta f_1 + \frac{\Delta x_1}{\Delta x_2} \Delta f_2\right) - \Delta x_1 f'(2) \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S'_1 \\ S'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ -10 \end{bmatrix} \overset{Gauss}{\Leftrightarrow} \begin{matrix} S'_2 = -2 \\ S'_1 = 2 \end{matrix} \Leftrightarrow S' = [2, -2]^T$$

Από τον τύπο του Hermite έχουμε για κάθε περίπτωση:

1) $x \in [-2, -1]$:

$$S(x) = \left[(x+1)^2 + 2(x+2)(x+1)^2\right](-2) + (x+2)(x+1)^2 \cdot 1 + (x+1)(x+2)^2 \cdot 2 = -x^3 - 4x^2 - 3x.$$

2) $x \in [-1, 1]$:

$$S(x) = \frac{(x+1)(x-1)^2}{4} \cdot 2 + \frac{(x-1)(x+1)^2}{4}(-2) = -x^2 + 1$$

3) $x \in [1, 2]$:

$$S(x) = \left[(x-1)^2 - 2(x-2)(x-1)^2\right](-2) + (x-2)(x-1)^2(-1) + (x-1)(x-2)^2(-2) =$$

$$= x^3 - 4x^2 + 3x$$

Μια παρατήρηση:

- $x \in [-2, -1] \Rightarrow -x \in [1, 2] \rightarrow S(-x) = S(x)$ άρτια
- $x \in [2, 1] \Rightarrow -x \in [-1, -2] \rightarrow S(x) = S(x)$ άρτια